



TITLE:

## 34.ランダムネットワークの空間構造(パターン形成、運動と統計,研究会報告)

AUTHOR(S):

原, 啓明; 小幡, 常啓

---

CITATION:

原, 啓明 ...[et al]. 34.ランダムネットワークの空間構造(パターン形成、運動と統計,研究会報告). 物性研究 1988, 50(3): 428-431

ISSUE DATE:

1988-06-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/93088>

RIGHT:

## 34. ランダムネットワークの空間構造

東北大工 原 啓明

小幡 常啓

媒質中に発生する亀裂<sup>1)</sup>、神経回路網のネットワーク<sup>2)</sup>、大気中の放電（雷の発生）<sup>3)</sup>、また、情報科学のシステムを構成する要素<sup>4)</sup>等は興味あるパターンを示す。我々は、これらの系が示す共通の性質を調べる目的で、以下で述べる表式で特徴付けられた成長するランダムネットワーク（RN）を提案する。また、系の空間構造をサイズ-頻度分布を通して調べる。

RNは、個数がそれぞれ  $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$  で、長さ  $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_k, \dots$  のボンドから構成されたものである。この系の状態は、

$$\begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \dots & \ell_k & \dots \\ n_1 & n_2 & \dots & n_k & \dots \end{pmatrix} \quad (1)$$

と、ボンドの分布が示すパターンによって規定されるものとする。以下では、“鎖型（c）”と“樹木型（t）”のパターンを考える。

RNの節点〔ボンドの接点あるいは先端（c型では先端のみ）〕では、長さ  $\ell_k$  ( $k=1, 2, \dots$ ) のボンドが確率  $P(\ell_k)$  で発生するものとする。 $P(\ell_k)$  の評価は、節点近傍の空間構造を反映して行なう。節点近傍の空間構造を調べるために、仮想的な微小な基本要素（X, Y, Z, ...）M 個をバラまく。2 基本要素間の距離は、お互いに隣接する確率  $p$ 、隣接しない確率  $q (= 1-p)$  を使って、

$$d(X, Y) = 1 \quad (X \text{ と } Y \text{ は確率 } p \text{ で隣接する}) \quad (2a)$$

$$d(X, Y) = \begin{cases} 1 & (X \text{ と } Y \text{ は確率 } p \text{ で隣接する}) \\ 2 & (X \text{ と } Y \text{ は確率 } q \text{ で隣接しない}) \end{cases} \quad (2b)$$

と定義する（図 1 (a), (b)）。。

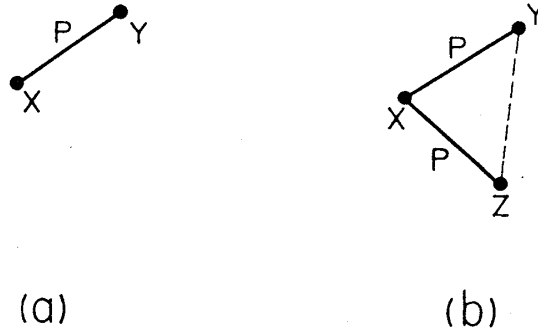


図 1

合体した基本要素は、距離 0 であると定義する。

距離 0 の基本要素群  $m_0$  個を原点とし、距離 1 だけ離れた 1 次層に基本要素群  $m_1$  個、以下次々に距離 1 だけ離れた層に要素群  $m_2$  個,  $m_3$  個, ... を配置する。この配置が実

現する確率  $P_{\text{conf}} = \text{Prob} \{m_i \mid 0 \leq i \leq b, \sum_{i=0}^b m_i = M\}$  ( $b$ : 最外殻の層の番号、

$M$ : 全基本要素数) は  $p$  と  $q$  に関する  $m_i$  積を使って書き下せる。 $P_{\text{conf}}$  を最大にする  $m_i$  は

$$F = \ln P_{\text{conf}} + \mu \left( \sum_{i=0}^b m_i - M \right) \quad (3)$$

によって評価される。 $\mu$  は Lagrange の未定定数である。

$m_i$  は充分大として、連続変数と見なす。 $\partial F / \partial m_k = 0$  によって  $m_k$  を求めると、 $p \ll 1$  では、 $X_{k+1} (= m_{k+1}/m_k)$  は

$$X_{k+1} = \ln X_k + (1 - \eta) \quad (4)$$

となる。 $\eta$  は  $b$  と  $p$  で決まる定数である。式(4)は図 2 で示す変化を行なう。

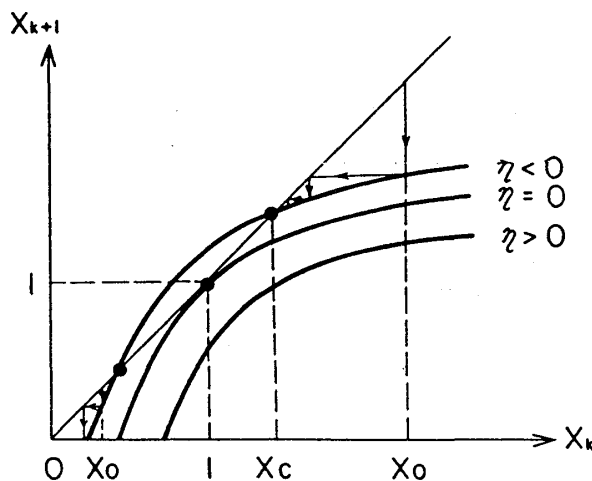


図 2

変化の様子は、 $\eta$  の値と初期条件 ( $X_0 (=m_1/m_0) >, <, = 1$ ) によって決まる。特に、 $\eta = 0$  では、(i)  $X_0 = 1$  の時  $m_k = \text{一定}$ 、(ii)  $X_0 > 1$  の時  $m_k \propto k^\lambda$  ( $0 < \lambda < 1$ )、また  $\eta > 0$  では、(iii)  $X_0 > 1$  の時  $m_k \propto \sin^2 \xi k$  ( $\xi \ll 1$ )、と求めることが出来る。我々は節点近傍の空間構造を反映した  $P(\ell_k)$  を  $m_k$  の逆数によって評価する。即ち、

$$P(\ell_k) = 1/m_k \quad (5)$$

RNのパターンとして“鎖型(c)”の成長パターンを考えると、長さ  $\ell_k$  のボンドが発生・成長する節点は先端だけである。このパターンの変化では、系の状態は確率分布関数  $W_c(n_1, n_2, \dots, n_k, \dots; N)$  ( $\equiv W_c$ ) は

$$W_c(n_1, n_2, \dots, n_k, \dots; N) = \binom{N}{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots} \prod_{i=1}^k [P(\ell_i)]^{n_i} \quad (6)$$

$$\binom{N}{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots} = N! / \prod_{i=1}^k n_i, \quad N = \sum_{i=1}^k n_i$$

で特徴付けられる。 $n_i$  は条件 ( $\sum n_i = N$ ,  $\sum n_i \ell_i = L_c$ ) のもとで、 $S = k_B \ln W_c$  を最大にする分布として求める。式(4)を、特別な場合(i)~(iii)について求めた結果から、 $S$  を最大にする  $n_i$  (サイズ-頻度分布) は

$$n_i \propto \begin{cases} C_0 \exp(-\beta \ell_i) & (C_0 \text{ は定数}) & (7a) \\ \ell_i^{-\lambda} \exp(-\beta \ell_i) & (0 < \lambda < 1) & (7b) \\ (\sin^2 \xi \ell_i)^{-1} \exp(-\beta \ell_i) & (\xi \ll 1) & (7c) \end{cases}$$

となる。 $\beta$  は Lagrange の未定定数で条件  $\sum n_i \ell_i = L_c$  から決まる。

上の結果は、(7a)では指数分布、(7b)ではべき・指数分布、また(7c)では  $\ell_i$  が小さいときは(7b)と似ているが、 $\ell_i \sim \pi/\xi$  付近では増大する特異分布であることを示している。

またRNのパターンが“樹木(t)型”で成長する場合は、(6)に相当する  $W$  は、

$$W_c(n_0, n_1, n_2, \dots, n_k, \dots; N) = \frac{1}{N} \binom{N}{n_0, n_1, n_2, \dots, n_k, \dots} \prod_{i=0}^k [P(\ell_i)]^{n_i} \quad (8)$$

となる。ここで、 $n_i$  は分岐数  $i$  のボンドの個数 ( $i=0,1,2,\dots$ ) である。分岐数は図3で示す分岐の数である。即ち、A と B は分岐数2、C は分岐数1、D は分岐数3、E は分岐数0 (先端) である。

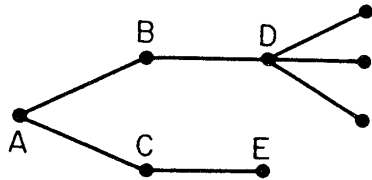


図3

式(6)と同様な解析では、(7)で示したタイプのサイズ・頻度分布が期待出来る。

#### 参考文献

- 1) 原 啓明, 岡山誠司: 数理地震学 II (1987), 50.  
H. Hara and S. Okayama: Phys. Rev. B37 (1988).
- 2) 原 啓明: 電子情報通信学会, MBE 87-122.
- 3) M. A. Uman: Lightning. Dover, NY (1984).
- 4) 岡山誠司: 一橋大学研究年報, 自然科学 25 (1986), 6月号, 3.
- 5) G. Nagels: Gen. Rel. Grav. 17 (1985), 545.